Séries Entières

I – Généralités :

Définition :
On appelle série entière une série de fonctions de terme général $a_n.z^n$ avec $n \in N$ et où :
$\forall n \in N$, $a_n \in K$ est donné et $z \in K$ est la variable.

Remarque :
Le premier terme de la série :
Pour $n = 0$, on applique la convention algébrique $\forall z \in K$, $z^0 = 1$. Donc le premier terme est la constante a_0.

Définition :
Soit une série entière $\Sigma a_n.z^n$, on appelle rayon de convergence de cette série entière l'élément R de $R^+ \cup \{+\infty\}$ défini par : $R = \sup \{ x \in R^+ \mid (a_n.z^n)_n$ est bornée $\}$

Propriété :
Soit une série entière $\Sigma a_n.z^n$. Soit R son rayon de convergence.
$\forall z \in K$, la série numérique $\Sigma a_n.z^n$:
1°) Converge absolument si $|z| < R$
2°) Diverge absolument si $|z| > R$
3°) Le cas $|z| = R$ est douteux

Définition :
Le disque ouvert de centre O et de rayon R est appelé disque de convergence de la série.

Recherche du rayon de convergence :
Pour déterminer le rayon de convergence d'une série entière $\Sigma a_n.z^n$, on peut essayer de :
1°) Trouver un équivalent simple de a_n.
2°) Appliquer la règle de d'Alembert (dans 85% des cas).
3°) Faire des majorations et minorations en module.
4°) Parfois, utiliser une somme de plusieurs série.

Propriété :
La série de fonctions $\Sigma a_n.z^n$ converge normalement (donc uniformément) sur tout compact du disque de convergence.

Propriété :
La somme d'une série entière est une fonction définie et continue sur le disque ouvert de convergence.

Propriété :
$\forall z \in C$ tel que $|z| < 1$: $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} (-z)^n = \frac{1}{1+z}$ (R = 1)

II – Opérations sur les séries entières :

Définition :
On appelle somme de deux séries entières $\sum_{n\geq 0} a_n.z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n.z^n$ la série entière $\sum_{n\geq 0} (a_n + b_n).z^n$

Propriété :
Si R_1 et R_2 sont les rayons de convergence des séries entières $\sum_{n\geq 0} a_n.z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n.z^n$.

Alors la série somme $\sum_{n\geq 0} (a_n + b_n).z^n$ a un rayon de convergence R tel que $R \geq \min(R_1,R_2)$.

De plus, si $|z| < \min(R_1,R_2)$, alors : $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n).z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n.z^n$.

Remarque :
On peut donner un résultat plus précis : si $R1 \neq R2$, alors $R = \min(R_1,R_2)$

Rappel :
Le produit de deux séries numérique Σu_n et Σv_n est la série Σw_n définie par : $w_n = \sum_{p+q=n} u_p.v_q$. Or on sait que si Σu_n et Σv_n convergent absolument, alors la série produit Σw_n converge absolument.
De plus, si U , V , W sont les 3 sommes, alors W = U.V

Définition et Propriété :
Soient deux séries entières $\Sigma a_n.z^n$ et $\Sigma b_n.z^n$ de rayons de convergence R_1 et R_2.
On appelle série entière produit la série $\Sigma c_n.z^n$ où : $\forall$ n, $c_n = \sum_{p+q=n} a_p.b_q$. Son rayon de convergence R vérifie : $R \geq \min(R_1,R_2)$. De plus,si $|z| < \min(R_1,R_2)$, alors : $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n.z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n.z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n.z^n\right)$

Remarque :

Contrairement à la somme, la formule : (si $R1 \neq R2$, $R=\min(R1,R2)$) est fausse avec le produit.

Propriété : (Intégration des séries entières)

Soit une série entière $\Sigma a_n.z^n$ ($x \in R$), de rayon de convergence R, de somme f (x) (définie et continue sur]-R,R[ ). Alors $\forall x \in$]-R,R[, $\int_0^x f(t).dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.\frac{x^{n+1}}{n+1}$.

De plus le rayon de convergence de cette nouvelle série entière est égal à R.

Propriété :

$\forall x \in]-1;1[$, $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$ avec R = 1.

Corollaire :

$\forall x \in]-1;1[$, $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ avec R = 1.

Remarque :

En partant de : $\forall x \in]-1;1[$, $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n . x^{2n}$ avec R = 1.

Et en intégrant, il vient : $\forall x \in]-1;1[$, $\text{Arctan } x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n . \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ avec R = 1.

Propriété : (Dérivation des séries entières)

Soit une série entière $\Sigma a_n.x^n$, avec $x \in R$, de rayon de convergence R, de somme f (x).

Alors f est dérivable sur]-R,R[. De plus, $\forall x \in]-R,R[$, $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n.a_n.x^{n-1}$ (problème en 0)

Et le rayon de convergence de la série dérivée est égal à R.

Corollaire :

La somme d'une série entière est de classe C^∞ sur l'intervalle ouvert de convergence.

De plus, pour tout $k \in N^*$, $f^{(k)}(x)$ est égal à la série dérivée k fois terme à terme.

Propriété :

Si r est une constante complexe donnée, alors : $\forall x \in R$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{r^n}{n!}.x^n = e^{r.x}$ (R = + ∞)

Corollaire :

En posant x = 1 et r = z, il vient : $\forall z \in C$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$

Et pour z = 1 : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$

Propriété :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos x = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!}.x^{2p}$ et $\sin x = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!}.x^{2p+1}$ ($R = +\infty$ par l'absurde)

Remarque :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\text{ch } x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ et $\text{sh } x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ ($R = +\infty$ par l'absurde)

Remarque :

Si a est une constante strictement positive donnée, alors : $\forall x \in \mathbb{R}$, $a^x = e^{x.\ln(a)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\ln a)^n}{n!}.x^n$

($R = +\infty$)

Propriété :

Si α est une constante réelle donnée, alors : $\forall x \in]-1,1[$, $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha.(\alpha-1)...(\alpha-(n-1))}{n!}.x^n$

(avec la convention qu'un produit ne contenant aucun terme vaut 1)

De plus , le rayon de convergence de cette série entière est égal à 1 si $\alpha \notin \mathbb{N}$.

Si $\alpha \in \mathbb{N}$, les coefficients sont tous nuls à partir d'un certain rang. La série entière est alors égale à un polynôme et le rayon de convergence est $R = +\infty$. On obtient la formule du binôme de Newton.

III – Développement d'une fonction en série entière :

Définition :

On dit qu'une fonction f de R dans K est développable en série entière en 0 (ou autour de 0) s'il existe une constante r strictement positive et une série entière $\Sigma a_n.x^n$ telles que :

$\forall x \in]-r,r[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.x^n$

Remarque :

En faisant un changement de variable, on peut élargir cette définition à d'autres voisinages que celui de 0 (comme pour les développements limités).

Propriété : (Unicité du développement en série entière)

Si $\forall x \in]-r,r[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.x^n$. Alors f est de classe C^∞ sur]-r,r[et $\forall n \in N$, $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Ce qui entraîne l'unicité d'une telle série entière $\Sigma\, a_n.x^n$.

Corollaire :

Le développement en série entière d'une fonction paire (respectivement impaire), s'il existe, ne contient que des termes d'indice pair (respectivement impaire).

Remarques : (Liens entre développements limités et développements en série entière)

• Les coefficients du développement limité sont les mêmes que ceux du développement en série entière (s'ils existent).

• Il existe des fonctions C^∞ (donc admettant des développements limités à tout ordre en 0) qui ne sont pas développables en série entière. *Ex* : $f : R \to R$, $x \mapsto \begin{cases} \exp(-1/x^2) \ \ si \ \ x \neq 0 \\ 0 \ \ si \ \ x = 0 \end{cases}$

• Un développement limité à un nombre fini de termes mais n'est valable que dans un voisinage.

• Un développement en série entière est valable sur tout un intervalle mais a une infinité de termes.

Définition :

Soit f : $]-r,r[\to K$ de classe C^∞.

On appelle série de Taylor de la fonction f la série entière $\Sigma\, \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.x^n$.

Méthodes : (Développer une fonction f en série entière)

1°) On essaie de se ramener à des développements en série entière connus en utilisant addition, multiplication, intégration, dérivation et changement de variable.

2°) On calcule f '(x), voire f ''(x) et on essaie de trouver une équation différentielle dont f est solution ou on calcule $f^{(n)}(x)$ pour tout $n \in N$ et on applique alors la formule de Taylor puis on essaie de montrer que le reste tend vers 0 pour n tendant vers l'infini.

© Archibald L-D 2002

http://www.prepasciences.com